西 安 工 程 科 技 学 院 学 报
Journal of Xi' an University of Engineering Science and Technology
第 18卷第 3期 (总 71期)　　2004年 9月　　Vol. 18, No. 3(Sum No. 71)

文章编号: 1671-850X(2004)03-0263-02

关于 Smarandache LCM函数的一个方程

乐茂华[1,2]

(1.湛江师范学院 数学系, 广东 湛江 524048; 2.梧州师范高等专科学校 数学系, 广西 贺州 542800)

摘要: 对于 $n\in \mathbf{N}$,设 $SL(n)$ 是 n 的 Smarandache LCM函数. 本文中解决了有关 $SL(n)$的 一个方程问题.

关键词: 最小公倍数; Smarandache LCM 函数; 方程
中图分类号: O 156　　文献标识码: A

1 引言及主要结果

对于 $n\in \mathbf{N}$,设 $L(n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的最小公倍数,即

$$L(n)=[1,2,\cdots,n]. \tag{1}$$

1980年, Smarandache[1]引入了一类新的数论函数 $S(n)$, 称 Smarandache函数,它等于适合

$$r!\equiv 0 \pmod n \tag{2}$$

的最小正整数 r. 此后,人们讨论了另一类与 $L(n)$ 有关的数论函数 $SL(n)$,称为 Smarandache LCM 函数,它等于适合

$$L(k)\equiv 0 \pmod n \tag{3}$$

的最小正整数 k. 最近, Murthy[2] 注意到: 当 n 是素数时,必有 $SL(n)=S(n)=n$. 同时, Murthy提出以下问题:

问题 1

$$SL(n)=S(n),\ S(n)\neq n,\ n\in \mathbf{N} \tag{4}$$

是否有解 n?

本文中完整地解决了上述问题,即证明了:

定理 1 方程 (4) 有无穷多个解 n,而且这些解都可表成 $n=12$或

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}p. \tag{5}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是适合 $p_1<p_2<\cdots<p_s$ 的素数; $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是正整数; p 是适合

$$p>p_i^{a_i},\ i=1,2,\cdots,s, \tag{6}$$

的素数.

---

* 收稿日期: 2004-02-25
基金项目: 国家自然科学基金项目 (04011425); 广东省自然科学基金项目 (04011425); 广东省教育厅自然科学研究项目 (0161); 湛江市 988科技兴湛计划项目.
作者简介: 乐茂华 (1952-),男,上海市人,湛江师范学院数学系教授,主要从事数论研究.

上述定理的证明要用到文献 [3]中有关 Smarandache函数的下列性质:

引理 1 如果

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \tag{7}$$

是 n 的标准分解式,则必有 $S(n) = \max(S(p_1^{a_1}), S(p_2^{a_2}), \cdots, S(p_k^{a_k}))$.

引理 2 当 p 是素数且 a 是正整数时,

$$S(p^a) \equiv 0 \pmod p. \tag{8}$$

引理 3 在引理 2的题设条件下,如果 $a > 1$ 且 $p^a \neq 4$,则有 $S(p^a) < p^a$.

引理 4 当 (7) 是 n 的标准分解式时, $SL(n) = \max(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \cdots, p_k^{p_k})$.

2 定理 1的证明

设 n 是方程 (4) 的解, (7) 式是 n 的标准分解式,又设

$$p^a = \max(p_1^{T_1}, p_2^{T_2}, \cdots, p_k^{T_k}).$$

根据引理 1和 4,从 (4), (7) 和 (9) 式可知

$$p^a = SL(n) = S(n) = S(p_j^{a_j}), \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{10}$$

又从引理 2可知

$$S(p_j^{a_j}) \equiv 0, \pmod{p_j}. \tag{11}$$

结合 (10) 和 (11) 式立得 $p = p_j$ 以及

$$p^a = S(p^a). \tag{12}$$

根据引理 3,从 (12) 式可得 $p^a = 4$ 或 $a = 1$.

当 $p^a = 4$ 时,从 (7) 和 (9) 式可知 $n = 4$ 或 12. 因为 $S(4) = S(12) = 4$,故从 (4) 式可知此时该方程有解 $n = 12$.

当 $a = 1$ 时,从 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 以及 (9) 式可知 $p = p_k$. 由于方程 (4) 的解 n 适合 $S(n) \neq n$,故从 (7) 式可知 $k > 1$. 设 $s = k - 1$. 此时从 (7) 和 (9) 式可知 n 可表示成 (5) 式. 定理 1证毕.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. A function in the number theory [J]. Ann Timisoara Univ Ser Math, 1980, 28(1): 79-88.
[2] MURTHY A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions J, 2001, (12): 307-309.
[3] BALACENOIU I, SELEACU V. History of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions J, 1999, (10): 199-201.

An equation concerning the Smarandache LCM function

LE Mao-hua[1,2]

(1. Dept. of Math., Zhanjiang Normal College, Zhanjiang, Guangdong 524048, China;
2. Dept. of Math., Wuzhou Teachers College, Hezhou, Guangxi 542800, China)

Abstract For any positive integer n, let $SL(n)$ denote the Smarandache LCM function. In this paper, an equation concerning $SL(n)$ is solved.

Key words least common multiple; Smarandache LCM function; equation